# Kulshammer-Olsson-Robinson 予想について (表現論と非可換調和解析の展望)



土岡, 俊介

数理解析研究所講究録
第 1825 巻 2013 年 91-102



# Külshammer-Olsson-Robinson 予想について

(On the conjecture of Külshammer-Olsson-Robinson)

東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構　土岡俊介 (Shunsuke Tsuchioka)* †
Kavli Institute for the Physics and Mathematics of the Universe, Todai Institutes for Advanced Study

## 1 はじめに

本稿の目的は、Külshammer-Olsson-Robinson の予想 [KOR, Conjecture 6.4]（以下、KOR 予想と略する）の紹介と、論文 [Tsu] で提案した精密化 [Tsu, Conjecture 6.8][1]の説明である[2]。精密化は圏論化の文脈に基づいており（本稿 §5)、その説明には [Tsu2] も参考になるだろう。

### 1.1 記法

以下、$\mathbb{N}=\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で非負整数の集合を、$\mathbb{N}_+=\mathbb{Z}_{\geq 1}$ で正整数の集合を表すことにする。

0 の分割を $\phi$ で表し、$\emptyset$ は空集合を意味している。分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$ について、$m_k(\lambda)=|\{i\geq 1\mid \lambda_i=k\}|$ と定義し ($k\in\mathbb{N}_+$)、$|\lambda|=\sum_{i\geq 1}\lambda_i$、$\ell(\lambda)=\sum_{i\geq 1}m_i(\lambda)$ とする。$\mathsf{Par}(n)$ は $n$ の分割の集合であり ($n\in\mathbb{N}$)、$\mathsf{Par}=\bigsqcup_{n\geq 0}\mathsf{Par}(n)$ とする。$m,n\in\mathbb{N}$ について、$\mathsf{Par}_m(n)=\{(\lambda_i)_{i=1}^m\in\mathsf{Par}^m\mid\sum_{i=1}^m|\lambda_i|=n\}$ を $n$ の $m$-多重分割の集合とし、$u(m,n)=|\mathsf{Par}_m(n)|$ とする（特に $u(0,0)=1$ かつ、$n\in\mathbb{N}_+$ ならば $u(0,n)=0$ である)。

$R$ を単位的可換環とする。2 つの $m\times m$ 行列 $X,Y\in\mathsf{Mat}_m(R)$ がユニモジュラー同値である ($X\equiv_R Y$ と記す) とは、$X=PYQ$ となる可逆行列 $P,Q\in\mathrm{GL}_m(R)$ が存在することを言う。$R$ の元を成分に持つ正方行列 $X$ と、$R$ の元からなる多重集合 $S$ について、$X\equiv_R\mathsf{diag}(S)$ を $X\equiv_R S$ と略記する。ここで $\mathsf{diag}(S)=(s_{ij})_{i,j\in I}$ は多重集合として $\{s_{ii}\mid i\in I\}=S$ となる対角行列である。

### 1.2 KOR 予想の背景

**定義 1.1.** $\mathbb{F}$ を体、$A$ を有限次元 $\mathbb{F}$ 代数とする。$A$ のカルタン行列 $C_A$ を

$$([\mathsf{PC}(D):D'])_{D,D'\in\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(A))}\in\mathsf{Mat}_{|\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(A))|}(\mathbb{Z})$$

と定義する。ここで $\mathsf{Mod}(A)$ は有限次元左 $A$ 加群のなすアーベル圏であり、$D\in\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(A))$ について $\mathsf{PC}(D)$ はその射影被覆である。

*tshun@kurims.kyoto-u.ac.jp
†The research was supported by Research Fellowships for Young Scientists 23·8363, Japan Society for the Promotion of Science.
[1]正確には、「KOR 予想と同値な Hill 予想の精密化」と言うべきである。
[2]と書くと、[Tsu] は予想が主題と思われるかもしれない。ある意味そうなのだが、この論文の動機は対称群の表現論とは別に、純粋に量子群に関連した問題 [Kas, Problem 2] にも依っている。論文の主定理は、この問題に関連したものであるが、本稿ではこの周辺の話題には触れない。

$A=\overline{\mathbb{F}_p}G$ が標数 $p>0$ の代数閉体上の有限群 $G$ の群代数の場合、$\det C_A$ は $p$ の冪であることが知られている [Bra, Theorem 1]。より詳しく以下が知られている。

**定理 1.2** ([BrNe, Part III,§16]). $G$ を有限群、$p\geq 2$ を素数とし、$g_1,\cdots,g_k$ を $G$ の $p$-正則共役類[3] $C_1,\cdots C_k$ の代表元とすると、$C_{\overline{\mathbb{F}_p}G}\equiv_{\mathbb{Z}}\{|\mathrm{Syl}_p(C_G(g_i))|\mid 1\leq i\leq k\}$ が成り立つ[4]。

KOR 予想は、$G$ が対称群 $\mathfrak{S}_n$ の場合に、上記定理の "標数 $p$ が素数とは限らない 2 以上の自然数 $\ell$" への一般化を与える。

# 2 対称群の $\ell$-モジュラー表現論

## 2.1 対称群の通常指標論

良く知られている $\mathrm{Par}(n)$ による $\mathrm{Irr}(\mathrm{Mod}(\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n))$ のパラメトライズを復習しよう。この対応では分割 $\lambda\in\mathrm{Par}(n)$ について、対応する既約 $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$-加群の指標 $\chi_\lambda$ が、無限変数対称関数環 $\Lambda=\bigoplus_{n\geq 0}\varprojlim_{m\geq 0}\mathbb{Z}[x_1,\cdots,x_m]_n^{\mathfrak{S}_m}$ 中で $\forall\mu\in\mathrm{Par}(n),p_\mu=\sum_{\lambda\in\mathrm{Par}(n)}\chi_\lambda(C_\mu)s_\lambda$ によって特徴付けられるのであった [Mac, I.7]。ここで $p_\mu=\prod_{i=1}^{\ell(\mu)}(\sum_{j\geq 1}x_j^{\mu_i})$、$s_\lambda$ は Schur 関数 [Mac, I.3] で、$C_\mu$ はそのサイクル型が $\mu$ で与えられるような $\mathfrak{S}_n$ の元からなる $\mathfrak{S}_n$ の共役類である。

## 2.2 一般化されたブロック

**定義 2.1** ([KOR, §1]). $G$ を有限群とし、$\mathscr{C}\subseteq G$ を共役で不変な $G$ の部分集合とする[5]。$\mathcal{C}(G)$ を $G$ 上の複素数値類関数のなす複素ベクトル空間とし、さらに内積を $\langle\alpha,\beta\rangle_{\mathscr{C}}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in\mathscr{C}}\alpha(g)\overline{\beta(g)}$ と導入する(ここで $\alpha,\beta\in\mathcal{C}(G)$)。

(a) $G$ の通常指標 $\psi$ と $\varphi$ は、$\langle\psi,\varphi\rangle_{\mathscr{C}}\neq 0$ であるとき、*directly* $\mathscr{C}$*-linked* である言う(このことを $\psi\approx_{\mathscr{C}}\varphi$ と略記する)。これは明らかに対称的な関係である。

(b) $G$ の $\mathscr{C}$-ブロックとは、関係 $\approx_{\mathscr{C}}$ の推移的閉包による $G$ の通常指標の同値類のことである。

$p\geq 2$ を素数とする。定義 2.1 において $G_{p'}:=\{g\in G\mid \mathrm{ord}_G(g)\notin p\mathbb{Z}\}$ を $G$ の $p$-正則元の集合とすると、$G_{p'}$-ブロックは通常の $p$-ブロックであることに注意しよう。

**定義 2.2.** $\ell\geq 2$ を自然数とする。

(a) 分割 $\lambda$ が $\ell$-類正則であるとは、$\lambda$ のどの部分も $\ell$ で割り切れない(すなわち $\forall k\geq 1,m_{k\ell}(\lambda)=0$)ことを言う。$\mathrm{CRP}_\ell(n)$ によって、$n$ の $\ell$-類正則な分割の集合を表すこととする。

(b) 対称群 $\mathfrak{S}_n$ の $\ell$-ブロックとは、$\mathscr{C}_{\ell'}:=\bigsqcup_{\lambda\in\mathrm{CRP}_\ell(n)}C_\lambda$-ブロックのことである。

$p\geq 2$ が素数のとき、$\mathfrak{S}_n$ の $p$-正則共役類は $\{C_\lambda\mid\lambda\in\mathrm{CRP}_p(n)\}$ で尽くされることはよく知られている。よって $\ell=p\geq 2$ が素数のとき、定義 2.2 における対称群の $\ell$-ブロックは、通常のモジュラー表現論における $p$-ブロックの概念と同一である。

以下に引用する論文 [KOR] の主定理は、Brauer と Robinson によって証明された中山予想 [Nak, BrRo] の一般化を与えている。証明は、対称群の $\ell$-ウェイトが $w\geq 1$ の $\ell$-ブロックと、環積 $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})\wr$

[3] $g\in G$ が $p$-正則であるとは、$\mathrm{ord}_G(g)\notin p\mathbb{Z}$ となることを言う。ここで $\mathrm{ord}_G(g)$ は $g$ の $G$ における位数である。
[4] 有限群 $G$ の元 $g\in G$ について、$C_G(g)$ はその中心化群 $\{h\in G\mid gh=hg\}$ を意味している。
[5] 要するに、$\mathscr{C}$ は $G$ の共役類のいくつかの合併である。

$\mathfrak{S}_w$ の大島正則元による[6]ブロックとの "generalized perfect isometry" に基づくものであり、$\ell = p$ が素数の場合に限っても新しい証明になっている[7]。

**定理 2.3** ([KOR, Theorem 5.13]). $\ell \geq 2$ を自然数とする。$\lambda, \mu \in \mathsf{Par}(n)$ について、$\chi_\lambda$ と $\chi_\mu$ が同一の $\ell$-ブロックに属することと、$\lambda$ と $\mu$ が同一の $\ell$-コア[8]を持つことは同値である。

## 2.3 カルタン群（あるいは一般化カルタン不変量）

**定義 2.4** ([KOR, §1]). $G$ を有限群、$\mathscr{C}$ は共役不変かつ *closed* とする。ここで $\mathscr{C}$ が *closed* であるは、任意の $x \in \mathscr{C}$ と任意の $y \in G$ について、$\langle x \rangle = \langle y \rangle$ ならば $y \in \mathscr{C}$ となることを言う。

(a) $\mathcal{C}(G)$ の *2* つの部分加群 $\mathcal{R}_G(\mathscr{C})$ と $\mathcal{P}_G(\mathscr{C})$ を以下で定義する。

$$\mathcal{R}_G(\mathscr{C}) = \mathsf{span}_{\mathbb{Z}}\{\chi^{\mathscr{C}} \mid \chi \in \mathsf{Irr}(\mathbb{C}G)\},$$
$$\mathcal{P}_G(\mathscr{C}) = \mathcal{R}_G(\mathscr{C}) \cap \mathsf{span}_{\mathbb{Z}}\{\chi \mid \chi \in \mathsf{Irr}(\mathbb{C}G)\}.$$

ここで $\mathsf{Irr}(\mathbb{C}G)$ は $G$ の通常既約指標の集合であり、$f \in \mathcal{C}(G)$ について $f^{\mathscr{C}} \in \mathcal{C}(G)$ とは、$f^{\mathscr{C}}|_{\mathscr{C}} = f|_{\mathscr{C}}$ かつ $f^{\mathscr{C}}_{G \setminus \mathscr{C}} = 0$ となる $G$ の類関数を意味する。

(b) $G$ の $\mathscr{C}$ に関するカルタン群 $\mathsf{Cart}_G(\mathscr{C})$ を $\mathcal{R}_G(\mathscr{C})/\mathcal{P}_G(\mathscr{C})$ で定義する。これは有限群である。

有限アーベル群 $\mathsf{Cart}_G(\mathscr{C})$ の同型類を一般化カルタン不変量と呼ぶ。$\ell = p \geq 2$ が素数で、$\mathscr{C} = G_{p'}$ のとき、一般化カルタン不変量は通常のカルタン不変量[9]と（実質的に）同じ概念である。定理 1.2 から分かるように、通常のカルタン不変量は、群のある種の中心化群の情報を含んでいる。

## 2.4 KOR 予想

$p \geq 2$ が素数のときは、定理 1.2 より $\mathsf{Cart}_{\mathfrak{S}_n}(\mathscr{C}_{p'})$ の同型類が分かる[10]。[KOR] において、一般の $\ell \geq 2$ について、$\mathsf{Cart}_{\mathfrak{S}_n}(\mathscr{C}_{\ell'})$ の同型類が以下のように予想されている[11]。

**定義 2.5.** $\Pi$ を素数の集合の部分集合とする。$n \in \mathbb{N}_+$ について、

(a) $\mathsf{pdiv}(n)$ を、$n$ の素因数の集合とする（$n = 1$ のとき $\mathsf{pdiv}(n) = \emptyset$ である）。

(b) $n_\Pi$ を $n$ の $\Pi$-数とする。すなわち、$n \in n_\Pi\mathbb{Z}$ と $\mathsf{pdiv}(n_\Pi) \subseteq \Pi, \mathsf{pdiv}(n/n_\Pi) \cap \Pi = \emptyset$ で特徴付けられるただ *1* つの自然数とする。

**予想 2.6** ([KOR, Conjecture 6.4]). $\ell \geq 2$ を自然数とする。分割 $\lambda$ について、

$$r_\ell(\lambda) = \prod_{k \in \mathbb{N}_+ \setminus \ell\mathbb{Z}} (\ell/\mathsf{gcd}(\ell, k))^{\lfloor \frac{m_k(\lambda)}{\ell} \rfloor} \cdot \lfloor \frac{m_k(\lambda)}{\ell} \rfloor !_{\mathsf{pdiv}(\ell/\mathsf{gcd}(\ell,k))}$$

と定義する。このとき任意の $n \geq 0$ について、以下が成立する[12]。

$$\mathsf{Cart}_{\mathfrak{S}_n}(\mathscr{C}_{\ell'}) \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathsf{CRP}_\ell(n)} \mathbb{Z}/r_\ell(\lambda)\mathbb{Z}.$$

---

[6] 大島勝氏に由来する。彼らは Osima's set of "regular conjugacy classes" と書いている [KOR, pp.533]。
[7] 証明には大島氏による Murnaghan-Nakayama 公式の一般化 [Osi, §3] が役割を果たす。
[8] 分割 $\lambda$ が $\ell$-コアとは、対応する $\lambda$ 型のヤング図形から長さ $\ell$ のフックが 1 つも抜けないことを意味する。
[9] カルタン不変量とは、カルタン行列 $C_{\overline{\mathbb{F}_p}G}$ の単因子の（多重集合の）ことである
[10] $\lambda \in \mathsf{Par}(n)$ について、$g \in C_\lambda$ の中心化群 $C_{\mathfrak{S}_n}(g)$ は $\bigoplus_{k \geq 1}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_{m_k(\lambda)}$ と同型になる [JK, Chapter 4]。
[11] 彼らがどのようにして KOR 予想に至ったのかに関するヒューリスティックは [KOR, pp.545–546] で説明されている。
[12] 相異なる $\lambda, \mu \in \mathsf{CRP}_\ell(n)$ について、$r_\ell(\lambda) \notin r_\ell(\mu)\mathbb{Z}$ かつ $r_\ell(\mu) \notin r_\ell(\lambda)\mathbb{Z}$ となり得る。

予想 2.6 が KOR 予想の正確な命題である。KOR 予想は、当時 Kleshchev の学生だった David Hill 氏の博士論文中で次の条件 $(*)$ を満たす任意の $\ell \geq 2$ について肯定的に解決された。

$(*)$ $\ell$ の素因数分解が $\ell = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \cdots$ のとき[13]、任意の $i$ について $r_i \leq p_i$

# 3 リー理論

今まで有限群（対称群）のモジュラー表現論の話をしてきたので唐突に感じるかもしれないが、量子群に関する予備知識を復習することにする。量子群やその表現に関する事柄は、標数 0 の世界で考えることに注意しよう。以下 $v$ を不定元とし、体 $\mathbf{k} = \mathbb{Q}(v)$ とその部分環 $\mathscr{A} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ のために記号 $\mathbf{k}$ と $\mathscr{A}$ を固定する。また $\mathbf{k}$ の 2 つの環対合として、恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbf{k}}$ および、$v$ を $v^{-1}$ に写すような $\mathbb{Q}$-代数対合 $\tau : \mathbf{k} \to \mathbf{k}$ も記号を固定する。

## 3.1 量子群

量子群の定義を復習する。$A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ を対称化可能な GCM とし、$d = (d_i)_{i \in I}$ を $A$ の symmetrization とする[14]。$(\mathcal{P}, \mathcal{P}^\vee, \Pi, \Pi^\vee)$ を $A$ のカルタン・データとする。すなわち、

(a) $\mathcal{P}^\vee$ は階数 $(2|I| - \mathrm{rank}\, A)$ の自由加群で、$\mathcal{P} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{P}^\vee, \mathbb{Z})$、

(b) $\Pi^\vee = \{h_i \mid i \in I\}$ は $\mathbb{Z}$-線型独立な $\mathcal{P}^\vee$ の部分集合、

(c) $\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ は $\mathbb{Z}$-線型独立な $\mathcal{P}$ の部分集合、

(d) 任意の $i, j \in I$ について、$\alpha_j(h_i) = a_{ij}$ が成り立つ。

$\mathcal{P}^+$ で支配的整ウェイトの集合 $\{\lambda \in \mathcal{P} \mid \forall i \in I, \lambda(h_i) \in \mathbb{N}\}$ を表し、各 $i \in I$ について $\Lambda_i \in \mathcal{P}^+$ を基本支配的整ウェイトとする[15]。また、ワイル群 $W = W(A)$ は $\{s_i : \mathfrak{h}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^*, \lambda \longmapsto \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i \mid i \in I\}$ で生成される $\mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$ の部分群で、$\mathcal{P}(\subseteq \mathfrak{h}^*)$ にも作用するのであった。以下では、次の標準的な略記法も用いる（ここで $i \in I$ かつ $n \geq m \geq 0$）。$v_i = v^{d_i}$, $[n]_\ell = \sum_{k=1}^{n} v^{(n+1-2k)\ell}$, $[n]_\ell! = \prod_{m=1}^{n} [m]_\ell$, $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_i = \frac{[n]_i!}{[m]_i![n-m]_i!}$。

**定義 3.1.** 量子群 $U_v = U_v(A)$ とは、$\{e_i, f_i \mid i \in I\} \cup \{v^h \mid h \in \mathcal{P}^\vee\}$ で生成され、次を定義関係式に持つ $\mathbf{k}$ 上の単位的結合的代数である。

(a) $v^0 = 1$ かつ、任意の $h, h' \in \mathcal{P}$ について $v^h v^{h'} = v^{h+h'}$、

(b) 任意の $i \in I$ と $h \in \mathcal{P}$ について、$v^{-h} e_i v^h = v^{\alpha_i(h)} e_i, v^{-h} f_i v^h = v^{-\alpha_i(h)} f_i$、

(c) 任意の $i, j \in I$ について、$e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij}(K_i - K_i^{-1})/(v_i - v_i^{-1})$、

(d) $i \neq j$ なる任意の $i, j \in I$ について、$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k e_i^{(k)} e_j e_i^{(1-a_{ij}-k)} = 0$、

(e) $i \neq j$ なる任意の $i, j \in I$ について、$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k f_i^{(k)} f_j f_i^{(1-a_{ij}-k)} = 0$。

ただし $K_i = v^{d_i h_i}, v_i = v^{d_i}$ かつ $e_i^{(n)} = e_i^n/[n]_{d_i}!, f_i^{(n)} = f_i^n/[n]_{d_i}!$ である。

---

[13] もちろん $i \neq j$ ならば $p_i \neq p_j$ である。

[14] 任意の $i, j \in I$ について、$d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$ となり、かつ $\gcd(d_i)_{i \in I} = 1$ となるようなただ 1 つの $d \in \mathbb{N}_+^I$ のこと。

[15] $\Lambda_i$ は $\mathcal{P}$ の部分群 $\{\lambda \in \mathcal{P} \mid \forall i \in I, \lambda(h_i) = 0\}$ の ambiguity を除いて $\forall j \in I, \Lambda_i(h_j) = \delta_{ij}$ で決まる $\mathcal{P}^+$ の元。

## 3.2 Shapovalov form の変種

**定義 3.2** ([Lus, §3.4.5]). $\lambda \in \mathcal{P}$ について、*Verma* 加群を次の左 $U_v$-加群として定義する。

$$M(\lambda) = U_v/(\sum_{h\in\mathcal{P}} U_v(v^h - v^{\lambda(h)}) + \sum_{i\in I} U_v e_i).$$

$M(\lambda)$ は $U_v^-$-加群として階数 1 の自由加群であり、$M(\lambda)$ は最大真部分 $U_v$-加群 $K(\lambda)$ を持つ。そこで $\lambda \in \mathcal{P}$ について、既約 $U_v$-加群を $V(\lambda) = M(\lambda)/K(\lambda)$ によって定義する。

**定義 3.3.** $\mathbb{F}$ を体、$V$ を $\mathbb{F}$ 上のベクトル空間とする。

(a) 写像 $B : V \times V \to \mathbb{F}$ が双加法的であるとは、任意の $w, w_1, w_2 \in V$ について、$B(w_1 + w_2, w) = B(w_1, w) + B(w_2, w)$ と $B(w, w_1 + w_2) = B(w, w_1) + B(w, w_2)$ が成り立つことを言う。

(b) 双加法的な $B : V \times V \to \mathbb{F}$ について、その根基 $\mathsf{Rad}(B)$ を次の *2* つの加群が一致するときに限って、それとして定義する（一致しない場合は $\mathsf{Rad}(B)$ を定義しない）。

$$\{w_1 \in V \mid \forall w_2 \in V, B(w_1, w_2) = 0\}, \quad \{w_2 \in V \mid \forall w_1 \in V, B(w_1, w_2) = 0\}.$$

(c) 双加法的な写像 $B$ が非退化であるとは、$\mathsf{Rad}(B)$ が定義されて $\mathsf{Rad}(B) = 0$ となることを言う。

$U_v$ は次で定まる $\mathbb{Q}$-環反対合 $\Omega$ と $\mathbb{Q}$-環反同型 $\Upsilon$ を持つ。

$$\begin{aligned} &\Omega(e_i) = f_i, && \Omega(f_i) = e_i, && \Omega(v^h) = v^{-h}, && \Omega(v) = v^{-1}, \\ &\Upsilon(e_i) = v_i f_i K_i^{-1}, && \Upsilon(f_i) = v_i^{-1} K_i e_i, && \Upsilon(v^h) = v^{-h}, && \Upsilon(v) = v^{-1}. \end{aligned}$$

以下は、リー環の標準的な教科書にある Shapovalov form の存在と同様にして確認できる。

**命題 3.4** ([Tsu, Proposition 3.8]). $\lambda \in \mathcal{P}$ について、以下を満たす非退化で双加法的な写像 $\langle , \rangle_{\mathsf{QSh}} : V(\lambda) \times V(\lambda) \to \mathbf{k}$ および $\langle , \rangle_{\mathsf{RSh}} : V(\lambda) \times V(\lambda) \to \mathbf{k}$ がそれぞれ唯 *1* つずつ存在する。

(i) $\langle aw_1, w_2 \rangle_X = \tau(a)\langle w_1, w_2 \rangle_X$、$\langle w_1, aw_2 \rangle_X = a\langle w_1, w_2 \rangle_X$ かつ $\langle w_1, w_2 \rangle_X = \tau(\langle w_2, w_1 \rangle_X)$、

(ii) $\langle 1_\lambda, 1_\lambda \rangle_X = 1$ かつ $\langle uw_1, w_2 \rangle_{\mathsf{QSh}} = \langle w_1, \Omega(u)w_2 \rangle_{\mathsf{QSh}}$ かつ $\langle uw_1, w_2 \rangle_{\mathsf{QSh}} = \langle w_1, \Upsilon(u)w_2 \rangle_{\mathsf{RSh}}$。

ここで $X \in \{\mathsf{QSh}, \mathsf{RSh}\}$ であり、$w_1, w_2 \in V(\lambda)$, $u \in U_v$, $a \in \mathbf{k}$ である。

## 3.3 Lusztig 格子

**定理 3.5** ([Lus, Theorem 14.4.3],[Lus2, Theorem 4.5]). $U_v^{\mathscr{A}}$ を $\{e_i^{(n)}, f_i^{(n)}, K_i^{\pm 1} \mid i \in I, n \geq 0\}$ で生成される $U_v$ の部分 $\mathscr{A}$-代数とする。このとき $U_v^{\mathscr{A}}$ は $U_v$ の $\mathscr{A}$-格子である[16]。

さて、$U_v$-加群 $M$ が可積分であるとは、以下の 2 条件を満たすことであった。

(i) $M$ はウェイト空間分解を持つ。すなわち $\nu \in \mathcal{P}$ について $M_\nu = \{m \in M \mid \forall h \in \mathcal{P}^\vee, v^h m = v^{\nu(h)} m\}$ とすると、$\dim M_\nu < +\infty$ かつ $M = \oplus_{\nu\in\mathcal{P}} M_\nu$ となる。

(ii) 任意の $m \in M$ と任意の $i \in I$ について、ある $n > 0$ が存在して $f_i^n m = e_i^n m = 0$ となる。

[16] $\mathbb{F}$ を体、$R \subseteq \mathbb{F}$ をその部分環とする。$\mathbb{F}$-ベクトル空間 $V$ とその $R$-部分加群 $W$ について、$W$ が自由 $R$-加群で、かつ包含 $W \subseteq V$ が同型 $\mathbb{F} \otimes_R W \xrightarrow{\sim} V$ を誘導するとき、$W$ は $V$ の $R$-格子であると言う。

以下のことはよく知られている [Lus, Proposition 3.5.8, Proposition 5.2.7]。

(a) $\lambda \in \mathcal{P}$ について, $V(\lambda)$ が可積分であることと $\lambda \in \mathcal{P}^+$ であることは同値。

(b) $\lambda \in \mathcal{P}^+$ について、$V(\lambda)$ のウェイトの集合 $P(\lambda) := \{\mu \in \mathcal{P} \mid V(\lambda)_\mu \neq 0\}$ は $W$-不変。

**定理 3.6** ([Lus, Theorem 14.4.11]). $\lambda \in \mathcal{P}^+$ とすると、$V(\lambda)^{\mathscr{A}} := U_v^{\mathscr{A}} 1_\lambda$ は $V(\lambda)$ の $\mathscr{A}$-格子である。さらに任意の $\nu \in P(\lambda)$ について、$V(\lambda)_\nu^{\mathscr{A}} := V(\lambda)_\nu \cap V(\lambda)^{\mathscr{A}}$ は $V(\lambda)_\nu$ の $\mathscr{A}$-格子である。

## 3.4 グラム行列

**定義 3.7.** 以下の *6* つ組 $(\mathbb{F}, \varepsilon, R, V, S, V^R)$ について、グラム行列を $\mathsf{GM}_{\mathbb{F},\varepsilon,R}(V, S, V^R) = (S(w_i, w_j))_{1 \leq i,j \leq \dim V}$ と定義する。ここで $(w_i)_{1 \leq i \leq \dim V}$ は $V^R$ の自由 $R$-基底である。

(a) $\mathbb{F}$ は体、$\varepsilon : \mathbb{F} \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}$ は環対合で、$R$ は $\varepsilon(R) \subseteq R$ となる $\mathbb{F}$ の部分環、

(b) $V$ は $\mathbb{F}$ 上の有限次元ベクトル空間で、$V^R$ は $V$ の $R$-格子、

(c) $S : V \times V \to \mathbb{F}$ は、任意の $w_1, w_2 \in V$ と $a \in \mathbb{F}$ について $S(aw_1, w_2) = \varepsilon(a) S(w_1, w_2)$ と $S(w_1, aw_2) = aS(w_1, w_2)$ を満たす双加法的で非退化な写像。

$X$ と $Y$ を $V^R$ の 2 つの異なる自由 $R$-基底の選択に付随したグラム行列とすると、適当な $P \in \mathrm{GL}_{\dim V}(R)$ が存在して $X = \varepsilon({}^{\mathrm{tr}}P) Y P$ となることに注意しよう。

**定義 3.8.** $\lambda \in \mathcal{P}^+$ と $\mu \in P(\lambda)$ について、以下の *2* つのグラム行列を定義する。

$$\mathsf{QSh}^{\mathsf{M}}_{\lambda,\mu} = \mathsf{QSh}^{\mathsf{M}}_{\lambda,\mu}(A) = \mathsf{GM}_{\mathbf{k},\tau,\mathscr{A}}(V(\lambda)_\mu, \mathsf{QSh}, V(\lambda)_\mu^{\mathscr{A}}),$$
$$\mathsf{RSh}^{\mathsf{M}}_{\lambda,\mu} = \mathsf{RSh}^{\mathsf{M}}_{\lambda,\mu}(A) = \mathsf{GM}_{\mathbf{k},\tau,\mathscr{A}}(V(\lambda)_\mu, \mathsf{RSh}, V(\lambda)_\mu^{\mathscr{A}}).$$

このとき、以下を示すのは難しくない [Tsu, §3]。

**命題 3.9.** $\lambda \in \mathcal{P}^+$ と $\mu \in P(\lambda)$ について、対角成分が $v^{\mathbb{Z}}$ に属するような対角行列 $D$ で $\det D = 1$ なるものが存在して、$D\mathsf{QSh}^{M}_{\lambda,\mu} = \mathsf{RSh}^{M}_{\lambda,\mu}$ となるように両辺のグラム行列を取ることが出来る。

**命題 3.10.** $\lambda \in \mathcal{P}^+, \mu \in P(\lambda), i \in I$ について、$\mathsf{QSh}^{\mathsf{M}}_{\lambda,\mu} = \mathsf{QSh}^{\mathsf{M}}_{\lambda,s_i(\mu)}$ と両辺のグラム行列を取れる。

# 4 Khovanov-Lauda-Rouquier 代数

2007 年に、Khovanov-Lauda と Rouquier によって独立に、量子群の半分を圏論化する代数の族 (KLR 代数) が導入された [KL1, KL2, Rou]。

**定義 4.1** ([Rou, §3.2.1]). $\mathbb{F}$ を体、$I$ を有限集合とし、$Q = (Q_{ij}(u,v)) \in \mathsf{Mat}_I(\mathbb{F}[u,v])$ を $Q_{ii} = 0$ かつ、任意の $i, j \in I$ について $Q_{ij}(u,v) = Q_{ji}(v,u)$ となるように取る。

(a) $n \geq 0$ について、*KLR* 代数 $R_n(\mathbb{F}; Q)$ とは $\{x_p, \tau_a, e_\nu \mid 1 \leq p \leq n, 1 \leq a < n, \nu \in I^n\}$ で生成され、次を定義関係式に持つ $\mathbb{F}$ 上の単位的結合的代数である。

- $e_\mu e_\nu = \delta_{\mu\nu} e_\mu$, $1 = \sum_{\mu \in I^n} e_\mu$, $x_p x_q = x_q x_p$, $x_p e_\mu = e_\mu x_p$,
- $\tau_a \tau_b = \tau_b \tau_a$ *if* $|a - b| > 1$,
- $\tau_a^2 e_\nu = Q_{\nu_a,\nu_{a+1}}(x_a, x_{a+1}) e_\nu$, $\tau_a e_\mu = e_{s_a(\mu)} \tau_a$,
- $\tau_a x_p = x_p \tau_a$ *if* $p \neq a, a+1$,
- $(\tau_a x_{a+1} - x_a \tau_a) e_\nu = (x_{a+1} \tau_a - \tau_a x_a) e_\mu = \delta_{\nu_a;\nu_{a+1}} e_\nu$,
- $(\tau_{b+1}\tau_b\tau_{b+1} - \tau_b\tau_{b+1}\tau_b) e_\nu = \delta_{\nu_b,\nu_{b+2}} ((x_{b+2} - x_b)^{-1} (Q_{\nu_b,\nu_{b+1}}(x_{b+2}, x_{b+1}) - Q_{\nu_b,\nu_{b+1}}(x_b, x_{b+1}))) e_\nu$.

(b) $n = \mathrm{ht}(\beta) := \sum_{i\in I}\beta_i$ となる $\beta = \sum_{i\in I}\beta_i \cdot i \in \mathbb{N}[I]$ について、$R_\beta(\mathbb{F};Q) = R_n(\mathbb{F};Q)e_\beta$ を $e_\beta = \sum_{\nu\in\mathrm{Seq}(\beta)} e_\nu$ と $\mathrm{Seq}(\beta) = \{(i_j)_{j=1}^n \in I^n \mid \sum_{j=1}^n i_j = \beta\}$ によって定める。

(c) $\lambda = \sum_{i\in I}\lambda_i \cdot i \in \mathbb{N}[I]$ と $n = \mathrm{ht}(\beta)$ なる $\beta \in \mathbb{N}[I]$ について、以下のように定める。

$$R_n^\lambda(\mathbb{F};Q) = R_n(\mathbb{F};Q)/R_n(\mathbb{F};Q)(\textstyle\sum_{\nu\in I^n} x_1^{\lambda_{h_{\nu_1}}} e_\nu)R_n(\mathbb{F};Q),$$
$$R_\beta^\lambda(\mathbb{F};Q) = R_\beta(\mathbb{F};Q)/R_\beta(\mathbb{F};Q)(\textstyle\sum_{\nu\in\mathrm{Seq}(\beta)} x_1^{\lambda_{h_{\nu_1}}} e_\nu)R_\beta(\mathbb{F};Q).$$

KLR 代数についての PBW 型定理 [Rou, Theorem 3.7] より、$\{e_\beta \mid \mathrm{ht}(\beta) = n\}$ が $R_n(\mathbb{F};Q)$ のすべての中心的冪等元を尽くすことが分かる。また $R_n^\lambda(\mathbb{F};Q)$ と $R_\beta^\lambda(\mathbb{F};Q)$ が、共に有限次元 $\mathbb{F}$-代数であることを示すのは難しくない。

**定義 4.2** ([Rou, §3.2.3]). $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ を対称化可能な *GCM* とし、$d = (d_i)_{i\in I}$ を $A$ の *symmetrization* とする。$Q^A = (Q_{ij}^A(u,v)) \in \mathrm{Mat}_I(\mathbb{F}[u,v])$ を、以下を満たすように取る。

$$Q_{ii}^A(u,v) = 0, \quad Q_{ij}^A(u,v) = Q_{ji}^A(v,u), \quad t_{i,j,-a_{ij},0} = t_{j,i,0,-a_{ij}} \neq 0.$$

ここで $i,j \in I$ かつ、$Q_{ij}^A(u,v) = \sum_{\substack{p,q\ge 0 \\ pd_i+qd_j=-d_ia_{ij}}} t_{ijpq}u^pv^q$ である。

$n \ge 0$ と $\mathrm{ht}(\beta) = n$ なる $\lambda,\beta \in \mathbb{N}[I]$ について、$R_n(\mathbb{F};Q^A)$, $R_\beta(\mathbb{F};Q^A)$, $R_n^\lambda(\mathbb{F};Q^A)$, $R_\beta^\lambda(\mathbb{F};Q^A)$ は全て以下の割り当てによって $\mathbb{Z}$-次数付き代数となる。

$$\deg(e_\nu) = 0, \quad \deg(x_pe_\nu) = 2d_{\nu_p}, \quad \deg(\tau_ae_\nu) = -d_{\nu_a}a_{\nu_a,\nu_{a+1}}.$$

また、対応 $\sum_{i\in I}\beta_i \cdot i \mapsto \sum_{i\in I}\beta_i\Lambda_i$ によって、$\mathbb{N}[I]$ と $\bigoplus_{i\in I}\mathbb{N}\Lambda_i(\subseteq \mathcal{P}^+)$ を断りなく同一視する。

## 4.1 対称群の群代数と KLR 代数

**定義 4.3.** $\ell \ge 2$ を自然数とするとき、$Q_\ell \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[u,v])$ を以下で定義し、体 $\mathbb{F}$ について $Q_\ell^{\mathbb{F}} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}(\mathbb{F}[u,v])$ を $Q_\ell$ の自然な像とする。

$$(Q_\ell)_{i,j} = \begin{cases} -(u-v)^2 & (\ell = 2 \text{ かつ } i \neq j) \\ \pm(v-u) & (\ell \ge 3 \text{ かつ } j = i \pm 1) \\ 1 & (\ell \ge 3 \text{ かつ } j \neq i, i\pm 1) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

**定義 4.4.** $\ell \ge 2, n \ge 0$ を自然数とする。

(a) $|\rho| + \ell d = n$ となるような $\ell$-コア $\rho$ と自然数 $d \ge 0$ の組 $(\rho,d)$ の集合を $\mathrm{Bl}_\ell(n)$ とする。

(b) $(\rho,d) \in \mathrm{Bl}_\ell(n)$ について、$\ell$-コアが $\rho$ となるような $\lambda \in \mathrm{Par}(n)$ の集合を $B_\ell^{\rho,d}(\subseteq \mathrm{Par}(n))$ とする。

**定義 4.5.** $p \ge 2$ を素数とする。$(\rho,d) \in \mathrm{Bl}_p(n)$ について、以下を定義する。

(a) $e_{\rho,d} = \sum_{\lambda\in B_p^{\rho,d}} \frac{\chi_\lambda(1)}{n!} \sum_{g\in\mathfrak{S}_n} \chi_\lambda(g)g^{-1}$,

(b) $\beta_{\rho,d} = \sum_{x\in\rho}\mathrm{res}(x) + d\cdot\sum_{y\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} y \in \mathbb{N}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$。ここで $\sum_{x\in\rho}$ は $x$ が $\rho$ の箱を走る和を意味し、$x$ が $i$ 行 $j$ 列にあるとき $\mathrm{res}(x) = j - i + p\mathbb{Z}$ である。

$e_{\rho,d}$ は先験的には $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ の元であるが、中山予想によって $\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n$ の元に reduction できる。そして $\{e_{\rho,d} \mid (\rho,d) \in \mathsf{Bl}_p(n)\}$ は $\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n$ の原始的中心的冪等元（ブロック冪等元）を尽くす。

**定理 4.6** ([Rou, BK2]). $\mathbb{F}$ を標数 $p > 0$ の体とする。任意の $(\rho,d) \in \mathsf{Bl}_p(n)$ について、$\mathbb{F}$-代数としての同型 $\mathbb{F}\mathfrak{S}_n e_{\rho,d} \cong R^{\Lambda_0}_{\beta_{\rho,d}}(\mathbb{F}; Q^{\mathbb{F}}_p)$ が存在する。特に $\mathbb{F}\mathfrak{S}_n \cong R^{\Lambda_0}_n(\mathbb{F}; Q^{\mathbb{F}}_p)$ である。

### 4.2 A 型岩堀・ヘッケ環と KLR 代数

以上のように対称群の群代数は、KLR 代数の有限次元商になり、特に次数付き代数になる（対称群の群代数の斉次表示）。同じ結果が A 型岩堀・ヘッケ環でも成立する。

**定義 4.7.** $R$ を可換整域とし、$q \in R$ を固定する。$A$ 型岩堀・ヘッケ環とは、$\{T_i \mid 1 \le i < n\}$ で生成され、以下を定義関係式に持つ $R$-代数である（$1 \le a \le n-2$ かつ $1 \le b, c < n$ で $|b-c| > 1$）。

$$(T_b + 1)(T_b - q) = 0, \quad T_aT_{a+1}T_a = T_{a+1}T_aT_{a+1}, \quad T_bT_c = T_cT_b.$$

**定義 4.8.** $\ell \ge 2$ について、*1* の原始 $\ell$ 乗根[17] $\eta_\ell$ を持つような体 $k_\ell$ を考え、記号を固定する。

$\ell \ge 2$ と $n \ge 0$ について、以下が知られている。そこで、$(\rho,d) \in \mathsf{Bl}_\ell(n)$ について、$e'_{\rho,d}$ を [DJ, §5] の意味で対応する $\mathcal{H}_n(k_\ell;\eta_\ell)$ の原始的中心冪等元とする。

(i) $k_\ell$ は $\mathcal{H}_n(k_\ell;\eta_\ell)$ の分解体 [Don, §2.2]、

(ii) $\mathsf{Bl}_\ell(n)$ は、$\mathcal{H}_n(k_\ell;\eta_\ell)$ の原始的中心冪等元をパラメトライズする。

**定理 4.9** ([Rou, BK2]). $\ell \ge 2$ を自然数とする。任意の $(\rho,d) \in \mathsf{Bl}_\ell(n)$ について、$k_\ell$-代数としての同型 $\mathcal{H}_n(k_\ell;\eta_\ell)e'_{\rho,d} \cong R^{\Lambda_0}_{\beta_{\rho,d}}(k_\ell; Q^{k_\ell}_\ell)$ が存在する。特に $\mathcal{H}_n(k_\ell;\eta_\ell) \cong R^{\Lambda_0}_n(k_\ell; Q^{k_\ell}_\ell)$ である。

$\ell \ge 2$ として、$k_\ell$ が $\operatorname{char} k_\ell = 0$ の場合は、次数付きの LLTA 理論 [BK3, Corollary 5.15] と次数付き Brauer-Humphreys 相互律 [HM, Theorem 2.17] から $C^v_{e'_{\rho,d}\mathcal{H}_n(k_\ell;\eta_\ell)e'_{\rho,d}} = {}^{\mathrm{tr}}D_{\rho,d}D_{\rho,d}$ を得る。つまり、次数付きカルタン行列そのものをリー理論を用いて記述できる。ここで $D_{\rho,d} = (d_{\lambda,\mu}(v))_{\lambda \in B^{\rho,d}_\ell, \mu \in B^{\rho,d}_\ell \cap \mathsf{RP}_\ell(d)}$ で、$\mathsf{RP}_\ell(d)$ は $\ell$-正則な $d$ の分割の集合であり、林による $U_v(A^{(1)}_{\ell-1})$ のフォック空間表現 $\mathcal{F} = \bigoplus_{\lambda \in \mathsf{Par}} \mathbf{k}|\lambda\rangle$ と $V(\Lambda_0) \cong U_v(A^{(1)}_{\ell-1})|\phi\rangle$ 上の Lusztig の標準基底（= 柏原の lower 大域基底）$\bigsqcup_{n \ge 0}\{G(\mu) := \sum_{\lambda \in \mathsf{Par}(n)} d_{\lambda,\mu}(v)|\lambda\rangle \mid \mu \in \mathsf{RP}_\ell(n)\}$ を思い出そう [LLT, §6]。

## 5 圏論化

### 5.1 次数付き表現論による圏論化と量子化

**定義 5.1.** $A$ を体 $\mathbb{F}$ 上の次数付き有限次元代数とする。すなわち $A$ は体 $\mathbb{F}$ 上の有限次元代数であって、任意の $i,j \in \mathbb{Z}$ について $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$ となる $\mathbb{F}$-ベクトル空間の分解 $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ を持つ[18]。

(a) $\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A)$ は有限次元左次数付き $A$-加群と次数を保つ $A$-準同型からなるアーベル圏を意味し、$\mathsf{Proj}_{\mathsf{gr}}(A)$ は有限次元左次数付き $A$-射影加群からなる $\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A)$ の充満部分圏を意味する。

---

[17] 標数が 0 の場合、1 の原始 $\ell$ 乗根は同一の定義多項式（円分多項式）を持つが、正標数では必ずしもそうではない。しかし少なくとも本稿で必要な結果には、そのような差異は影響を及ぼさない。

[18] このとき $1 \in A_0$ が自動的に導出される。

(b) $\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A)$ の対象 $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ と $k \in \mathbb{Z}$ について、$M\langle k\rangle$ とは任意の $n \in \mathbb{Z}$ について $(M\langle k\rangle)_n = M_{k+n}$ となる $\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A)$ の対象の略記法である。割り当て $(M \xrightarrow{f} N) \longmapsto (M\langle k\rangle \xrightarrow{f} N\langle k\rangle)$ は $\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A)$（あるいは $\mathsf{Proj}_{\mathsf{gr}}(A)$）上の自己圏同値を与える。この同値を $\langle k\rangle$ と書く。

(c) 次数付きカルタン・ペアリング $\omega_A : \mathsf{K}_0(\mathsf{Proj}_{\mathsf{gr}}(A)) \times \mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A)) \to \mathscr{A}$ を次で定める。

$$\langle [P], [M]\rangle \longmapsto \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Hom}_A(P, M\langle k\rangle)v^k.$$

(d) $A$ の次数付きカルタン行列 $C_A^v$ を次で定める。

$$\left(\textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}}[\mathsf{PC}_{\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A)}(D) : D'\langle -k\rangle]v^k\right)_{D,D'\in \mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A))/\sim} \in \mathsf{Mat}_{|\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A))/\sim|}(\mathscr{A}).$$

ここで $\mathsf{PC}_{\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A)}(D)$ は $\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A)$ における $D$ の射影被覆であり、$M \sim N$ は、ある $k \in \mathbb{Z}$ が存在して $\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A)$ として $M\langle k\rangle \cong N$ となることの略記法である。

いくつか簡単な注意をしておこう。

(i) $\mathbb{F}$ が $A$ の分解体であれば、$C_A^v = {}^{\mathrm{tr}}(\omega_A(\mathsf{PC}(D), \mathsf{PC}(D')))_{D,D'\in\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A))/\sim}$ を得る。

(ii) $\mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A))$ と $\mathsf{K}_0(\mathsf{Proj}_{\mathsf{gr}}(A))$ は共に $v = [\langle -1\rangle]$ によって $\mathscr{A}$-加群構造を持つ。すなわち $\mathbb{F}$ 代数 $A$ に次数があれば，圏論化を通じて decategorification である $\mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}(A))$（あるいは $\mathsf{K}_0(\mathsf{Proj}(A))$）の量子化 $\mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A))$（あるいは $\mathsf{K}_0(\mathsf{Proj}_{\mathsf{gr}}(A))$）が得られる。

(iii) $\omega_A$ は、任意の $a \in \mathsf{K}_0(\mathsf{Proj}_{\mathsf{gr}}(A))$ と $b \in \mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A))$ について $\omega_A(va, b) = v^{-1}\omega_A(a, b)$ と $\omega_A(a, vb) = v\omega_A(a, b)$ となるという意味において $\tau$-sesquilinear である。

(iv) $C_1^v$ と $C_2^v$ を異なる $\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A))/\sim$ の代表系の取り方に付随した次数付きカルタン行列とすると、対角成分が $v^{\mathbb{Z}}$ に属するようなある対角行列 $D$ があって、$C_2^v = \tau({}^{\mathrm{tr}}D)C_1^v D$ なる。

(v) 次数を忘れると、全単射 $\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A))/\sim \xrightarrow{\sim} \mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(A))$ と等式 $C_A^v|_{v=1} = C_{|A|}$ を得る。

## 5.2 圏論化によるモジュラー表現論とリー理論の対応

定理 4.6 から輸入される対称群の群代数上の次数は、有木の圏論化 $\bigoplus_{n\geq 0}\mathsf{K}_0(\mathsf{Proj}(\mathbb{F}\mathfrak{S}_n)) \cong V(\Lambda_0)^{\mathbb{Z}}$ を量子化することが知られている [BK1]。同じことが A 型岩堀・ヘッケ環についても言える。この設定で、以下のようにより強くリー理論とモジュラー表現論とが圏論化を通じて関係する。

**定理 5.2** ([BK3, Theorem 4.18]). $\mathbb{F}$ を代数的閉体とする。自然数 $\ell \geq 2$ について $A_{\ell-1}^{(1)}$ 型のカルタン・データを考える。任意の $\lambda \in \mathcal{P}^+$ について、$U_v^{\mathscr{A}}(A_{\ell-1}^{(1)})$-加群同型写像 $\delta$ と $\varepsilon$ であって、

$$\begin{array}{ccc} V(\lambda)^{\mathscr{A}} & \xrightarrow[\delta]{\sim} & \oplus_{n\geq 0}\mathsf{K}_0(\mathsf{Proj}_{\mathsf{gr}}(R_n^\lambda)) \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ V(\lambda)^{\mathscr{A},*} & \xleftarrow[\varepsilon]{\sim} & \oplus_{n\geq 0}\mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(R_n^\lambda)) \end{array}$$

を可換にするものが存在する。このとき、さらに以下が可換図式になる。

$$\begin{array}{ccc} V(\lambda)^{\mathscr{A}} \otimes_{\mathscr{A}} V(\lambda)^{\mathscr{A},*} & \xrightarrow{\mathsf{RSh}|_{V(\lambda)^{\mathscr{A}}\times V(\lambda)^{\mathscr{A},*}}} & \mathscr{A} \\ {\scriptstyle \delta\otimes\varepsilon^{-1}}\downarrow & & \| \\ \oplus_{n\geq 0}\mathsf{K}_0(\mathsf{Proj}_{\mathsf{gr}}(R_n^\lambda)) \otimes_{\mathscr{A}} \oplus_{n\geq 0}\mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(R_n^\lambda)) & \xrightarrow[\oplus\omega_{R_n^\lambda}]{} & \mathscr{A} \end{array}$$

ここで $R_n^\lambda(\mathbb{F};Q_\ell^{\mathbb{F}})$ を $R_n^\lambda$ と略記し、さらに以下の略記を用いた。

(i) $X\in\{\mathsf{QSh},\mathsf{RSh}\}$ について、$V(\lambda)^{\mathscr{A},*}=\{v\in V(\lambda)|\forall w\in V(\lambda)^{\mathscr{A}},\langle v,w\rangle_X\in\mathscr{A}\}$。ここで右辺は $X\in\{\mathsf{QSh},\mathsf{RSh}\}$ の選択に依存しないことに注意。

(ii) $a$ は包含 $V(\lambda)^{\mathscr{A}}\subseteq V(\lambda)^{\mathscr{A},*}$ で、$b$ は忘却関手 $\mathsf{Proj}_{\mathrm{gr}}(R_n^\lambda)\to\mathsf{Mod}_{\mathrm{gr}}(R_n^\lambda)$ から誘導される写像。

**定義 5.3.** $\ell\geq 2,d\geq 0$ について、$w\in W(A_{\ell-1}^{(1)})$ を用いて、$C_{\ell,d}^v=\mathsf{QSh}^{\mathsf{M}}_{\Lambda_0,w\Lambda_0-d\delta}(A_{\ell-1}^{(1)})$ とする。

$C_{\ell,d}^v$ は命題 3.10 の通り $w$ には依存せず、また $\mathsf{RSh}^{\mathsf{M}}_{\Lambda_0,w\Lambda_0-d\delta}(A_{\ell-1}^{(1)})$ と命題 3.9 の意味で関連する。そして定理 5.2 の設定において、$\mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}_{\mathrm{gr}}(R_n^\lambda))_{\mathbf{k}}:=\mathbf{k}\otimes_{\mathscr{A}}\mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}_{\mathrm{gr}}(R_n^\lambda))$ とし、$\omega^{\mathbf{k}}_{R_n^\lambda}:\mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}_{\mathrm{gr}}(R_n^\lambda))_{\mathbf{k}}\times\mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}_{\mathrm{gr}}(R_n^\lambda))_{\mathbf{k}}\to\mathbf{k}$ を $\omega_{R_n^\lambda}:\mathsf{K}_0(\mathsf{Proj}_{\mathrm{gr}}(R_n^\lambda))\times\mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}_{\mathrm{gr}}(R_n^\lambda))\to\mathscr{A}$ の拡張とすると、次が成立している。

$$\mathsf{GM}_{\mathbf{k},\tau,\mathscr{A}}(\mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}_{\mathrm{gr}}(R_n^\lambda))_{\mathbf{k}},\omega^{\mathbf{k}}_{R_n^\lambda},\mathsf{K}_0(\mathsf{Proj}_{\mathrm{gr}}(R_n^\lambda)))\equiv_{\mathscr{A}}\bigoplus\nolimits_{(\rho,d)\in\mathsf{Bl}_\ell(n)}C_{\ell,d}^v.$$

## 6 Hill予想とその次数付き版

KOR 予想はカルタン群 $\mathsf{Cart}_{\mathfrak{S}_n}(\mathscr{C}_{\ell'})$ を $\ell\geq 2$ と $n\geq 0$ について記述するものである。一方で

$$\mathsf{Cart}_{\mathfrak{S}_n}(\mathscr{C}_{\ell'})\cong\mathsf{Coker}(\mathbb{Z}^{\oplus|\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\mathcal{H}_n(k_\ell;\eta_\ell)))|}\to\mathbb{Z}^{\oplus|\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\mathcal{H}_n(k_\ell;\eta_\ell)))|},\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{x}C_{\mathcal{H}_n(k_\ell;\eta_\ell)})$$

となっていることが、以下の結果のとおり知られている。

**定理 6.1** ([Don, §2.2]). $\ell\geq 2$ を自然数とする。任意の $n\geq 0$ について、

$$\begin{array}{ccc}\mathsf{K}_0(\mathsf{Proj}(\mathcal{H}_n(k_\ell;\eta_\ell))) & \xrightarrow[\theta_n]{\sim} & \mathcal{P}_{\mathfrak{S}_n}(\mathscr{C}_{\ell'}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}(\mathcal{H}_n(k_\ell;\eta_\ell))) & \xrightarrow[\zeta_n]{\sim} & \mathcal{R}_{\mathfrak{S}_n}(\mathscr{C}_{\ell'})\end{array}$$

が可換図式になるような加群同型 $\theta_n$ と $\zeta_n$ が存在する。

すなわち、量子標数 $\ell$ の A 型岩堀・ヘッケ環のカルタン行列を用いて[19]、対称群の $\ell$-カルタン群が記述できる。Hill は、当時知られていた定理 5.2 の $v=1$ 版を用いて、量子標数 $\ell$ の A 型岩堀・ヘッケ環の表現論を $A_{\ell-1}^{(1)}$ 型リー理論の問題に帰着し、さらに無限変数対称関数環 $\Lambda$ の問題に帰着した。1 つの結論として、Hill は以下の予想が KOR 予想を導くことを示した [Hil]。

**予想 6.2** ([Hil, Conjecture 10.5]). $p\geq 2$ を素数、$r\geq 1$ を自然数とし、$\ell=p^r$ と置く。

$$\log_p I_{p,r}(\lambda)=\sum_{n\in\mathbb{N}_+\setminus p^r\mathbb{Z}}((r-\nu_p(n))m_n(\lambda)+\sum_{t\geq 1}\lfloor m_n(\lambda)/p^t\rfloor)$$

によって $p$ の冪 $I_{p,r}(\lambda)$ を定義すると（ここで $\lambda$ は分割）、任意の $d\geq 0$ について以下が成立する。

$$C_{\ell,d}^v|_{v=1}\equiv_{\mathbb{Z}}\bigsqcup_{s=1}^{d}\bigsqcup_{\lambda\in\mathsf{Par}(s)}\{I_{p,r}(\lambda)\}^{u(\ell-2,d-s)}.$$

[19] 定義 4.7 の設定において、$\min\{k\geq 2\mid 1+q+\cdots+q^{k-1}=0\in R\}$ が存在する場合、この値を量子標数と呼ぶ。

実際、予想 6.2 と KOR 予想は同値になっている。Hill は予想 6.2 を任意の素数 $p \geq 2$ と任意の $1 \leq r \leq p$ について証明した [Hil, Theorem 1.3]。このことは、前述の条件 $(*)$ を満たす全ての $\ell \geq 2$ について KOR 予想が成り立つことを含意する。

**定義 6.3.** 自然数 $n \geq 1$ と $\ell \geq 2$ について、自然数 $a_\ell(n) \geq 1$ と $\nu_\ell(n) \geq 0$ を、$a_\ell(n)\ell^{\nu_\ell(n)} = n$ と $a_\ell(n) \notin \ell\mathbb{Z}$ で一意的に定まるものと定義する。

**予想 6.4** ([Tsu, Conjecture 6.8]). $p \geq 2$ を素数、$r \geq 1$ を自然数とし、$\ell = p^r$ と置く。

$$I^v_{p,r}(\lambda) = \prod_{n \in \mathbb{N}_+ \setminus p^r\mathbb{Z}} \prod_{k=1}^{m_n(\lambda)} [p^{r+\nu_p(k)-\nu_p(n)}]_{a_p(k)p^{\nu_p(n)}}$$

と定義すると（ここで $\lambda$ は分割）、任意の $d \geq 0$ について以下が成り立つ。

$$C^v_{\ell,d} \equiv_{\mathscr{A}} \bigsqcup_{s=1}^{d} \bigsqcup_{\lambda \in \mathsf{Par}(s)} \{I^v_{p,r}(\lambda)\}^{u(\ell-2,d-s)}. \tag{1}$$

任意の $\lambda \in \mathsf{Par}$ について、明らかに $I^v_{p,r}(\lambda)|_{v=1} = I_{p,r}(\lambda)$ である。従って、予想 6.4 は予想 6.2 を導く。予想 6.4 の設定で、予想 6.4 は明らかに次を導く。

$$C^v_{\ell,d} \equiv_{\mathbb{Q}[v,v^{-1}]} \bigsqcup_{s=1}^{d} \bigsqcup_{\lambda \in \mathsf{Par}(s)} \{I^v_{p,r}(\lambda)\}^{u(\ell-2,d-s)}. \tag{2}$$

$r = 1$ のとき（つまり $\ell = p$ のとき）、(2) は安東・鈴木・山田の予想 [ASY, Conjecture 8.2 (i)] である[20]。この予想[21]を一般化することが論文 [Tsu] の動機の 1 つであった。ただし、予想 6.4 はいくつかの具体的な計算結果から帰納した結果であり、成り立つであろう根拠は、(1) の両辺の行列式が等しいこと [Tsu, Theorem 6.11] 以外には今のところ特にない。

また、KOR 予想そのものの次数付けも望ましい。特殊な場合として、$p \geq 2$ を素数、$r \geq 1$ として、$\ell = p^r$ のときの KOR 予想の次数付き版 [Tsu, Conjecture 6.18] を予想 6.4 と同じ要領で提案してみた[22]。ここでも [ASY, Conjecture 8.2 (ii)][23]が参考になった。

予想 6.4 が正しく、また予想 6.2 の証明が一般の $v$ でもそのまま働くことを期待すると、予想 6.4 では $v = 1$ の場合（つまり予想 6.2 の場合）とは異なり、$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathsf{Par}(n)$ について、$I^v_{p,r}(\lambda_1) \notin \mathscr{A} I^v_{p,r}(\lambda_2)$ かつ $I^v_{p,r}(\lambda_2) \notin \mathscr{A} I^v_{p,r}(\lambda_1)$ となりえるので、$v = 1$ の証明の制限や洞察をもたらす可能性がある。予想 6.4 が KOR 予想の解決に貢献することを期待して本稿を終えたい。

## 7 最後に

この度、講演の機会を与えてくださった木本一史さんに感謝いたします。また論文 [ASY] をはじめとして、山田裕史さん、鈴木武史さん、安東雅訓さんには本研究に有益な議論をしていただきました。そして沼田泰英さんには [Tsu] に必要な組合せ論の技法について多くのご指導をいただきました。共にここに記して感謝いたします。

---

[20] もっとも、3 氏とも $\mathscr{A}$ 上のユニモジュラー同値を念頭においていたそうだ。

[21] (2) も今のところ未解決であるが、これは予想 6.4 より易しいと思われる。実際、[Tsu, Proposition 2.3] の証明から $C^v_{\ell,d} \equiv_{\mathbb{Q}[v,v^{-1}]} \bigsqcup_{s=1}^{d} \bigsqcup_{\lambda \in \mathsf{Par}(s)} \{\prod_{i \geq 1} [\ell]_i^{m_i(\lambda)}\}^{u(\ell-2,d-s)}$ が分かる。

[22] 正確な命題は省略するが、[Tsu, Conjecture 6.18] は予想 6.4 から導出できる [Tsu, Proposition 6.20]。

[23] こちらは $v = 1$ のときにあたる [UY] が元ネタになっているようだ。

# 参考文献


[ASY] M. Ando, T. Suzuki and H-F. Yamada, *Combinatorics for graded Cartan matrices of the Iwahori-Hecke algebra of type A*, to appear in Ann.Comb., arXiv:1005.1134v5.

[BK1] J. Brundan and A. Kleshchev, *The degenerate analogue of Ariki's categorification theorem*, Math.Z. **266** (2010), 877–919.

[BK2] J. Brundan and A. Kleshchev, *Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras*, Invent.Math. **178** (2009), 451–484.

[BK3] J. Brundan and A. Kleshchev, *Graded decomposition numbers for cyclotomic Hecke algebras*, Adv.Math. **222** (2009), 1883–1942.

[BK4] J. Brundan and A. Kleshchev, *Cartan determinants and Shapovalov forms*, Math.Ann. **324** (2002), 431–449.

[Bra] R. Brauer, *On the Cartan invariants of groups of finite order*, Ann.of Math.(2) **42** (1941), 53–61.

[BrNe] R. Brauer and C. Nesbitt, *On the modular characters of groups*, Ann.of Math.(2) **42** (1941), 556–590.

[BrRo] R. Brauer and G. de B. Robinson, *On a conjecture by Nakayama*, Trans.Roy.Soc.Canada.Sect.III. **41** (1947), 11–19/20–25.

[DJ] R. Dipper and G. James, *Blocks and idempotents of Hecke algebras of general linear groups*, Proc.London Math.Soc. **54** (1987), 57–82.

[Don] S. Donkin, *Representations of Hecke algebras and characters of symmetric groups*, Studies in memory of Issai Schur, 49–67, Progr.Math., **210**, Birkhaüser Boston, Boston, MA, 2003.

[Hil] D. Hill, *Elementary divisors of the Shapovalov form on the basic representation of Kac-Moody algebras*, J.Algebra **319** (2008), 5208–5246.

[HM] J. Hu and A. Mathas, *Graded cellular bases for the cyclotomic Khovanov-Lauda-Rouquier algebras of type A*, Adv.Math. **225** (2010), 598–642.

[JK] G. James and A. Kerber, *The representation theory of the symmetric group*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **16**, Addison-Wesley, 1981.

[Kas] M. Kashiwara, *On crystal bases*, Representations of groups (Banff, AB, 1994), 155–197, CMS Conf.Proc., **16**, Amer.Math.Soc., Providence, RI, 1995.

[KL1] M. Khovanov and A. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups. I.*, Represent.Theory **13** (2009), 309–347.

[KL2] M. Khovanov and A. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups II.*, Trans.Amer.Math.Soc. **363** (2011), 2685–2700.

[KOR] B. Külshammer, J. Olsson and G. Robinson, *Generalized blocks for symmetric groups*, Invent.Math. **151** (2003), 513–552.

[LLT] A. Lascoux, B. Leclerc and J-Y. Thibon, *Hecke algebras at roots of unity and crystal bases of quantum affine algebras*, Comm.Math.Phys. **181** (1996), 205–263.

[Lus] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Reprint of the 1994 edition. Modern Birkhaüser Classics. Birkhaüser/Springer, New York, 2010.

[Lus2] G. Lusztig, *Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebras*, J.Amer.Math.Soc. **3** (1990), 257–296.

[Mac] I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Second edition. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, 1995.

[Nak] T. Nakayama, *On some modular properties of irreducible representations of a symmetric group. I*, Jap.J.Math. **18** (1941), 89–108.

[Osi] M. Osima, *On the representations of the generalized symmetric group*, Math.J.Okayama Univ. textbf4 (1954), 39–56.

[Rou] R. Rouquier, *2-Kac-Moody algebras*, arXiv:0812.5023

[Tsu] S. Tsuchioka, *Graded Cartan determinants of the symmetric groups*, to appear in Transactions of the American Mathematical Society

[Tsu2] 土岡俊介, 圏論の歩き方第 *14* 回 ～表現論と圏論化～, 数学セミナー 2012 年 9 月号, 78–84

[UY] K. Uno and H-F. Yamada, *Elementary divisors of Cartan matrices for symmetric groups*, J.Math.Soc.Japan **58** (2006), 1031–1036.